Általánosított számrendszerek vizsgálata a komplex számok körében

Doktori értekezés tézisei

Nagy Gábor

Komputeralgebra Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

Témavezető:
Dr. Kátai Imre, professor emeritus
a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Informatika Doktori Iskola
vezető: Dr. Benczúr András, egyetemi tanár
az MTA doktora
Numerikus és szimbolikus számítások doktori program
vezető: Dr. Járai Antal, egyetemi tanár
az MTA doktora
2012.

1. Bevezetés

A dolgozatban három, Kátai Imre által felvetett, általánosított számrendszerekkel kapcsolatos problémával foglalkozom. Ezek a következők:

1. Van-e számrendszer lyukkal?
2. Vannak-e szimultán számrendszerek a Gauss-egészek körében?
3. Számok kifejtése ellenjáték esetén

1.1. Definíció. *A $(Z, \mathcal{A})$ párt (Z Gauss-egész, $\mathcal{A}$ teljes maradékrendszer moduló Z) számrendszernek nevezzük, ha tetszőleges z Gauss-egésznek létezik a következő véges kifejtése:*

$$z = \sum_{j=0}^{n} a_j Z^j,$$

ahol $a_j \in \mathcal{A}$. A Z-t a számrendszer alapjának, $\mathcal{A}$-t jegyhalmaznak nevezzük.

Legyen tehát Z egy Gauss-egész, legyen a normája t. Mivel $\mathcal{A}$ teljes maradékrendszer moduló Z, ezért bármely z Gauss egész esetén egyértelműen létezik $d \in \mathcal{A}$, amire $Z|z - d$. Legyen $z_1 = \frac{z-d}{Z}$! A $J : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ leképezést definiáljuk a $J(z) = z_1$ összefüggéssel. A $K = \max_{a \in \mathcal{A}} |a|$ illetve $L = \frac{K}{|Z|-1}$ jelöléseket bevezetve könnyen belátható (lásd például [4]), hogy $|z| > L$ esetén $|J(z)| < |z|$, továbbá $|z| \leq L$ esetén $|J(z)| \leq L$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy bármely Gauss-egész J szerinti pályája egy idő után periodikus lesz.

1.2. Definíció. *$p \in \mathbb{Z}[i]$-t periodikus elemnek nevezzük, ha létezik $n \in \mathbb{Z}^+$, hogy $J^{(n)}(p) = p$, ahol $J^{(n)}$ a J n-edik iteráltját jelöli.*

Az általánosított számrendszerekkel kapcsolatban kitüntetett szerepük van a periodikus elemeknek. Könnyen látható, hogy $(Z, \mathcal{A})$ pontosan akkor számrendszer, ha egyetlen periodikus elem létezik, mégpedig a 0.

Az általánosított számrendszerekkel kapcsolatosan fontos szerepet játszik az $\mathcal{A}_c = \{0, 1, \ldots, t-1\}$, úgynevezett kanonikus jegyhalmaz. A kanonikus jegyhalmazzal alkotott számrendszert kanonikus számrendszernek nevezzük. Egy másik fontos jegyhalmazt, az úgynevezett K-típusú jegyhalmazt G. Steidl vezette be [9]-ben:

1.3. Definíció. *Legyen* $Z = a + bi$ *és* $t = |Z|^2$*, továbbá legyen* $E_\alpha^{(\varepsilon,\delta)}$ *azon* $d = k + li,\ k, l \in \mathbb{Z}$ *elemek halmaza, amelyekre*

$$d\overline{Z} = (k + li)(a - bi) = (ka + bl) + (la - kb)i = r + si$$

teljesíti a következőket:

- *ha* $(\varepsilon, \delta) = (1, 1)$*, akkor* $r, s \in (-t/2, t/2]$,
- *ha* $(\varepsilon, \delta) = (-1, -1)$*, akkor* $r, s \in [-t/2, t/2)$,
- *ha* $(\varepsilon, \delta) = (-1, 1)$*, akkor* $r \in [-t/2, t/2), s \in (-t/2, t/2]$,
- *ha* $(\varepsilon, \delta) = (1, -1)$*, akkor* $r \in (-t/2, t/2], s \in [-t/2, t/2)$.

Az így kapott halmazokat K-típusú jegyhalmazoknak nevezzük.

2. Számrendszerek módosított kanonikus jegyhalmazzal

Az első problémára adott pozitív válaszhoz vezető út a módosított kanonikus jegyhalmazokon keresztül vezetett. I. Kátai és J. Szabó [5]-ben bizonyította be a következő tételt.

2.1. Tétel. $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *pontosan akkor lesz egy kanonikus számrendszer alapja, ha* $Re(\alpha) < 0$ *és* $Im(\alpha) = \pm 1$.

1. Tézis. *A dolgozat első részében azt vizsgálom, hogy a kanonikus jegyhalmaz kétféle módosításával, hogyan kaphatunk számrendszert. Az egyik módosítás segítségével olyan rendszerhez jutunk, amiben van lyuk.*

Ezen rész alapjául a [7] cikk szolgál.

3. Szimultán számrendszerek

Indlekofer, Kátai és Racskó vizsgálta [3]-ban az egészek szimultán számrendszereit. Arra a kérdésre keresték a választ, hogy mely N_1, N_2-re lesz $(-N_1, -N_2, \mathcal{A}_c)$ szimultán számrendszer, ahol $2 \le N_1 < N_2$ egészek és $\mathcal{A}_c = \{0, 1, \ldots, |N_1||N_2| - 1\}$.

3.1. Definíció. *A $(-N_1, -N_2, \mathcal{A}_c)$ hármast szimultán számrendszernek nevezzük, ha minden z_1, z_2 egészhez található $a_j \in \mathcal{A}_c,\ j = 0, 1, \dots, n$, hogy*

$$z_1 = \sum_{j=0}^{n} a_j(-N_1)^j, \quad z_2 = \sum_{j=0}^{n} a_j(-N_2)^j.$$

3.1. Tétel (Indlekofer, Kátai and Racskó). *A fenti feltételek mellett $(-N_1, -N_2, \mathcal{A}_c)$ pontosan akkor szimultán számrendszer, ha $N_2 = N_1 + 1$.*

A dolgozatban először azt az általánosítást vizsgálom, amikor az egyik alap Gauss-egész, míg a másik egy racionális egész, a jegyhalmaz pedig a kanonikus jegyhalmaz.

2. Tézis. *Az alapok megfelelő megválasztásával szimultán számrendszert kapunk a kanonikus jegyhalmazzal.*

Ez az eredmény a [7] cikkben került publikálásra.

Ezt követően annak az esetnek a vizsgálata következik, amikor mindkét alap Gauss-egész.

3. Tézis. *Nem létezik szimultán számrendszer a Gauss-egészek körében a kanonikus jegyhalmazzal. A K-típusú jegyhalmazok segítségével tudunk olyan jegyhalmazt készíteni, amivel megfelelő Gauss-egészek szimultán számrendszert alkotnak.*

Ez a rész a [8] cikkre épül.

4. Előállítás ellenjátékkal

Daróczy, Járai és Kátai [1] -ben vizsgálta az intervallumkitöltő sorozatokat, majd ennek általánosításaként Daróczy és Kátai [2] -ben foglalkozott a következő problémával.

Legyen $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplex számok sorozata úgy, hogy $\sum |\lambda_n| < \infty$, és legyen $H(\Lambda)$ azon z komplex számok halmaza, melyekre

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n,$$

úgy hogy $\varepsilon_n \in \{0,1\}$. Határozzuk meg azon Λ sorozatokat, amikre $0 \in int(H(\Lambda))$.

Az említett cikkben azzal az esettel foglalkoztak, amikor $\lambda_n = \theta^n$, ahol $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| < 1$.

A következőkben azt vizsgálom, hogy mit mondhatunk, ha a

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n$$

alak helyett

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n + \delta_n \omega_n$$

alakban előállítható számokat vesszük, ahol a δ_n-eket egy ellenjátékos választja.

Először azt nézzük meg, mi a helyzet egy dimenzióban, vagyis a valós számok körében. A komplex számok körében hasonló eredményt kapunk.

Ezzel a témával kapcsolatos a [6] cikk.

Hivatkozások

[1] Z. Daróczy, A. Járai, I. Kátai: Intervalfüllende Folgen und volladditive Funktionen, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **50** (1986), 337-350.

[2] Z. Daróczy, I. Kátai: Generalized number systems in the complex plane *Acta Math. Hung.* **51** (1988), 409-416.,

[3] K.-H. Indlekofer, I. Kátai, P. Racskó, Number systems and fractal geometry, *Probability Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands* , (1993), 319-334.

[4] I. Kátai: Generalized number systems and fractal geometry, Janus Pannonius Univ., Pécs, Hungary, 1995. 1-40.

[5] I. Kátai, J. Szabó: Canonical number systems for complex integers, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **37** (1975), 255-260

[6] G. Nagy: On two games in the real line, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* **29.** (2008), 115-125.

[7] G. Nagy: Remarks on number systems of the Gaussian integers, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* **32.** (2010), 177-187.

[8] G. Nagy: On the simultaneous number systems of Gaussian integers, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* **35.** (2011), 223-238.

[9] G. Steidl: On symmetric representation of Gaussian integers, *BIT*, **29** (1989), 563-571.